

Kirchhoff und das Induktionsgesetz

Zur Neubearbeitung von DIN 1324 – 1: Elektromagnetisches Feld – Zustandsgrößen

Alle Gesetze der Physik – und damit auch die der Elektrotechnik – haben ihren Geltungsbereich und ihre Grenzen. Das weiß man vom Ohmschen Gesetz, und das weiß man auch von den Kirchhoffschen Gesetzen.

Letztere gelten insbesondere nur dann, wenn es sich um „geschlossene“ Kreise handelt, also solche, deren Wechselwirkung mit der Umgebung zu vernachlässigen ist.

Dies aber ist beim Induktionsgesetz gerade NICHT der Fall, hier spielt das umgebende Feld eine entscheidende Rolle.

Um dies zu zeigen, möchte ich einen weiteren Anwendungsfall vorstellen, der in vielen Physikbüchern zur Herleitung des Induktionsgesetzes dient.

Hier wird ein homogenes, zeitlich konstantes und unbegrenztes B-Feld angenommen, in dem eine Leiterschleife mit konstanter Breite $y=l$ durch eine bewegliche Seite (z.B. als dünner Stab oder Draht, Schleifdraht) begrenzt wird. Wird dieser in positiver x-Richtung (nach rechts) bewegt, wird eine Induktionsspannung erzeugt, die im angegebenen Sinne nach unten zeigt. Dass hier (in den Büchern) die andere Aspekte, nämlich die zeitliche Änderung des B-Feldes oder dessen räumliche Begrenztheit (vgl. Bilder 1a und 1b in RS 111.0.1_2006-0009), oft unerwähnt bleiben, sei am Rande vermerkt.

Dieser Anwendungsfall mag in der Praxis selten eine Rolle spielen, er ist aber die Abstraktion einer sehr häufigen technischen Anwendung, nämlich einer in einem konstanten Magnetfeld rotierenden (rechteckigen) Schleife in einem Wechselstrom- (oder auch Drehstrom)Generator.

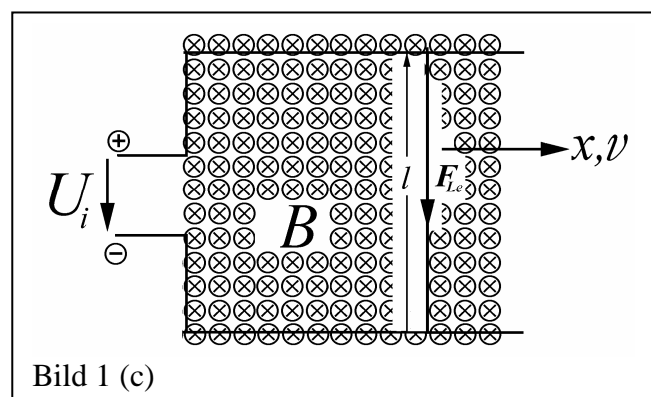
Diesen Fall möchte ich gerne als Bild 1c in die Norm aufgenommen sehen, weil er so oft angeführt wird.

Hier wird der Magnetische Fluss Φ bei konstantem B-Feld durch die Änderung der durchsetzten Fläche A bewirkt. Und es gilt

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot \vec{e}_n dA = -\vec{B} \cdot \frac{d}{dt} \int_A \vec{e}_n dA = -\vec{B} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{x} \times \vec{l}) = -\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{l}) = +\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = vB$$

Aus dieser Anordnung erkennt man auch genau das Vorzeichen der Induktionsspannung:

Das Skalarprodukt $B e_n$ ist hier negativ, da B in die Zeichenebene hinein zeigt, während die Flächennormale bei mathematisch positivem Umlaufsinn aus der Zeichenebene herauszeigt. Diesen Umlaufsinn zeigt auch der Spannungspfeil U_i , so dass die induzierte Spannung hier positive wird, wenn die Fläche sich bei Bewegung nach rechts vergrößert.



Man kann dies auch anders betrachten und erhält das Gleiche:

Im bewegten Draht wird durch die Lorentz-Kraft $\vec{F}_{Le} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ auf die negativ geladenen Elektronen eine Kraft nach unten ausgeübt, die zu einem Elektronenüberschuss an der unteren Klemme führt, die also dann den Minuspol darstellt.

NB: In dieser Anordnung findet man noch eine weitere Ableitung für die Induktionsspannung, wenn man das bewegte Inertialsystem des Schleifendrahts betrachtet. Nach den Transformationsgleichungen für elektromagnetischen Felder (Gln. 12 und 13 im 7. Entwurf zu DIN 1324-1) erhält man im bewegten System eine elektrische Feldstärke $\vec{E}' = 0 + (\vec{v} \times \vec{B})$, die zu einer Induktionsspannung $U'_i = \vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ führt.

Dies alles lässt scheinbar die Kirchhoffschen Gesetze außer acht; hier ist im geschlossenen Kreis $\sum U \neq 0$

Aber, wie schon gesagt, die Kirchhoffschen Gesetze gelten nur bedingt.

Man kann ein Ersatzschaltbild erstellen, das auf der oben genannten Lorentzkraft aufbaut:

Wie in Bild 2 gezeigt, kann man sich an jeder Stelle im bewegten Draht eine infinitesimal kleine Spannungsquelle vorstellen, in der eine (im wahrsten Sinne des Wortes **ELEKTROMORISCHE**) Kraft auf die Leitungselektronen ausgeübt wird.

Diese Anordnung lässt sich etwas übersichtlicher in Bild 3 darstellen.

In den andern bisher betrachteten Fällen in DIN 1324-1 Bild 1,a,b sind die infinitesimalen Spannungsquellen dU_i anders verteilt und nicht so leicht zu lokalisieren. Im Prinzip ändert das nichts daran, dass das Kirchhoffsche Maschengesetz hier nicht gilt.

Betrachtet man jedoch die virtuelle Spannungsquelle als real (Bild 4) und schließt den Stromkreis mit einem Widerstand R, dann kann man das Ohmsche und das Kirchhoffsche Maschen-Gesetz getrost anwenden und man erhält: $I = U_i/R$

Durch den Stromfluß entsteht wieder ein Magnetfeld H bzw. eine Magnetische Induktion B und nach dem 1. Ampereschen Gesetz (Kraft auf stromdurchflossene Leiter) greift an der bewegten Begrenzung eine Kraft F_a an, die der Bewegung entgegen wirkt, so dass eine mechanische Leistung $P = v \cdot F_a$ nötig ist.

Mit $\vec{F}_a = \int_l q d\vec{l} (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{l} \times \vec{B}$ wird $F_a = I l B$, $I = U_i/R$ und $U_i = l v B$ also

$$P = v \cdot I l B = v \cdot U_i/R \cdot l \cdot B = v \cdot v B l / R \cdot l \cdot B = v^2 B^2 l^2 / R = U_i^2 / R$$

wie es der Energieerhaltungssatz (wenn noch man über die Zeit integriert) erfordert.

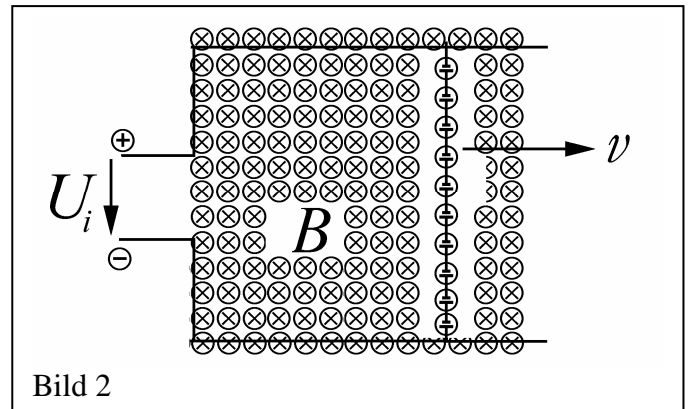


Bild 2

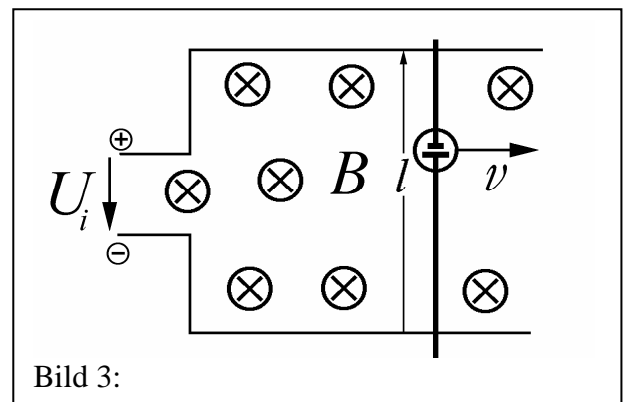


Bild 3:

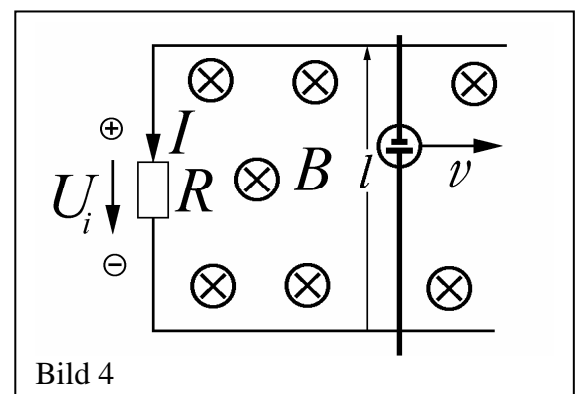


Bild 4